

★ Exercice 1 Questions de cours (*Guillaume Legendre*)

*** Question 1. (*Espace euclidien*) Donner la définition d'un espace euclidien

(a) En donner un exemple.

Question 2. Donner la définition d'une isométrie vectorielle entre deux espaces euclidiens.

Question 3. Donner la définition du groupe orthogonal $O(n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, en énonçant la propriété satisfaite par ses éléments.

Solution de l'exercice 1

Question 1. On appelle espace euclidien tout espace vectoriel E sur \mathbb{R} , de dimension finie et muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire une application de $E \times E$ à valeurs dans \mathbb{R} , bilinéaire, symétrique et définie (ou non dégénérée) positive.

(a) Un exemple d'espace euclidien est \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) muni du produit scalaire canonique.

Question 2. Étant donné deux espaces euclidiens E et F , on appelle isométrie vectorielle entre E et F une bijection linéaire f de E sur F qui préserve le produit scalaire, c'est-à-dire telle que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), f(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E.$$

Question 3. Le groupe orthogonal $O(n)$ est l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n , c'est-à-dire les matrices M de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t M M = I_n$.